PROBLEMA RESUELTO POYNTING

Se tiene un sistema cilíndrico en el cual el campo magnético es:

$$\overline{H} = \begin{cases} -A\rho\,\overline{1\phi}, \text{si } \rho \le a, 0 \le \phi < 2\pi, 0 < z < L \\ -A(a^2/\rho)\,\overline{1\phi}, \text{si } a \le \rho \le b, 0 \le \phi < 2\pi, 0 < z < L \\ \overline{0} \text{ en el resto del espacio} \end{cases}$$

Además, se sabe que el campo eléctrico adentro del sistema es $\overline{E} = -(V_0/L)\,\overline{1z}$

a) Determinar $\overline{S}$ dentro del sistema.
b) En base al Teorema de Poynting en forma diferencial, determina las densidades de corriente volumétrica del sistema, e indica si son de fuente o de conducción.
c) Usando la condición de frontera para el vector de Poynting, determina las densidades de corriente superficial del sistema, e indica si son de fuente o de conducción.
d) Determina la corriente total suministrada por la fuente.

SOLUCIÓN

a) El vector de Poynting viene dado por:

$$\overline{S} = \overline{E} \times \overline{H} = \begin{cases} \dfrac{AV_0}{L}\rho\,\overline{1\rho}, \text{si } \rho \le a, 0 \le \phi < 2\pi, 0 < z < L \\ \dfrac{AV_0}{L}\dfrac{a^2}{\rho}\,\overline{1\rho}, \text{si } a \le \rho \le b, 0 \le \phi < 2\pi, 0 < z < L \\ \overline{0} \text{ en el resto del espacio} \end{cases}$$

b) El Teorema de Poynting en forma diferencial, en régimen estático, establece que $-\overline{J_s} \cdot \overline{E} = \nabla \cdot \overline{S} + \overline{J_c} \cdot \overline{E}$, pero en una región no pueden existir simultáneamente una $\overline{J_s}$ (densidad de corriente de fuente) y una $\overline{J_c}$ (densidad de corriente de conducción). Para establecer la existencia de $\overline{J_s}$ o de $\overline{J_c}$ hay que calcular $\nabla \cdot \overline{S}$ y analizar el resultado obtenido.
Se tiene que:

$$\nabla \cdot \overline{S} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho S_\rho)}{\partial \rho} = \begin{cases} \dfrac{2AV_0}{L} > 0, \text{si } \rho < a, 0 \le \phi < 2\pi, 0 < z < L \\ 0, \text{si } a < \rho < b, 0 \le \phi < 2\pi, 0 < z < L \\ 0 \text{ en el resto del espacio} \end{cases}$$

De acuerdo con esto, como $\nabla \cdot \overline{S} > 0$ en la región $\rho < a, 0 \le \phi < 2\pi, 0 < z < L$, en esa región existe $\overline{J_s}$, mientras que en el resto del espacio no hay $\overline{J_s}$ ni $\overline{J_c}$ porque $\nabla \cdot \overline{S} = 0$.
En la región $\rho < a, 0 \le \phi < 2\pi, 0 < z < L$, se tiene:

$$\nabla \cdot \overline{S} = \frac{2AV_0}{L} = -\overline{J_s} \cdot \overline{E} = -J_s\overline{1z} \cdot \left(-\frac{V_0}{L}\overline{1z}\right) = \frac{J_s V_0}{L} \Rightarrow J_s = 2A \Rightarrow \overline{J_s} = 2A\overline{1z}$$

c) La condición de frontera para el vector de Poynting establece que donde la componente normal a una superficie del vector de Poynting es discontinua se cumple que $\overline{1n} \cdot \left[\overline{S}\big|_{S^+} - \overline{S}\big|_{S^-} \right] = -\overline{K_s} \cdot \overline{E} - \overline{K_c} \cdot \overline{E}$, pero en la superficie no puede coexistir una $\overline{K_s}$ (densidad de corriente superficial de fuente) con una $\overline{K_c}$ (densidad de corriente superficial de conducción). Para establecer la existencia de $\overline{K_s}$ o $\overline{K_c}$, hay que calcular $\overline{1n} \cdot \left[\overline{S}\big|_{S^+} - \overline{S}\big|_{S^-} \right]$ y analizar el resultado.

En el caso de este problema, el vector de Poynting es discontinuo en $\rho=b$. Allí se tiene:

$$\overline{1n} \cdot \left[\overline{S}\big|_{b^+} - \overline{S}\big|_{b^-} \right] = -\frac{AV_0}{L}\frac{a^2}{b} < 0$$

Esto implica que en $\rho=b$ hay una $\overline{K_c}$. Entonces:

$$\overline{1n} \cdot \left[\overline{S}\big|_{b^+} - \overline{S}\big|_{b^-} \right] = -\frac{AV_0}{L}\frac{a^2}{b} = -\overline{K_c} \cdot \overline{E} = -K_c \overline{1z} \cdot \left(-\frac{V_0}{L}\overline{1z} \right) = K_c \frac{V_0}{L}$$

Entonces:

$$K_c = -A\frac{a^2}{b} \Rightarrow \overline{K_c} = -A\frac{a^2}{b}\overline{1z}$$

En la superficie $\rho=a$ no hay $\overline{K_c}$ ni $\overline{K_s}$ porque el vector de Poynting es continuo.

d) Para hallar la corriente total suministrada por la fuente, hay que calcular el flujo de la densidad de corriente $\overline{J_s}$:

$$I_s = \int_S \overline{J_s} \cdot \overline{da_z} = 2A\pi a^2$$